### **Лабораторная работапо теме *«Тема 1.4. Численное интегрирование»***

#### **1.4.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи численного интегрирования.
2. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
3. Оценка погрешности численного интегрирования. Правило Рунге.
4. Графическая иллюстрация методов прямоугольников, трапеций и Симпсона.

#### **1.4.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл.1.4-1 для численного интегрирования:

* **f(x)** – подынтегральную функцию;
* **a, b**– пределы интегрирования;
* метод интегрирования для выполнения п.**2** – значение в столбце **t**;
* метод интегрирования для выполнения п.**5** – значение в столбце **m**;
* начальный шаг интегрирования **h0.**

При этом значения в столбцах t и m означают: 1 –интегрирование методом средних прямоугольников, 2 – методом трапеций, 3 – методом Симпсона.

1. **Составить схему алгоритма и написать программу** по выбранному методу численного интегрирования (или по указанному преподавателем), провести контрольное тестирование на примере, разобранном в п. 1.4-5.
2. **Вычислить интеграл**  с точностью и записать результаты вычислений в табл.1.4-2.



1. **Зависимости числа итераций от заданной точности**в логарифмическом масштабе.
2. **Вычислить «ручным расчетом» интеграл**методом,определяемым значением столбца **m** из таблицы1.4-1, с шагом и ( и ) и **оценить погрешность** по правилу **Рунге**.



#### **1.4.3. Варианты задания**

Таблица 1.4-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **f(x)** | **a** | **b** | **t** | **m** |  |
| **1** | **8 e-x sin(-2x)** | 2 | 3 | 1 | 3 | 0.25 |
| **2** | **e-x sin(2x)** | 0 | 2 | 2 | 1 | 0.5 |
| **3** | **x3/2 – 2 x sin(x)** | 3 | 4 | 3 | 2 | 0.25 |
| **4** | **e-xcos(-2x)** | 2 | 4 | 1 | 3 | 0.5 |
| **5** | **cos(2x) + 2 sin(x)** | 1 | 3 | 2 | 1 | 0.5 |
| **6** | **8 sin(2x) – x** | 0.2 | 1.2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **7** | **5 cos(-2x) e-x** | -0.5 | 0.5 | 2 | 3 | 0.25 |
| **8** | **x sin(x + 1) – cos(x – 5)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **9** | **0,25 x3 + cos(x/4)** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0,5 |
| **10** | **sin(2x) – 2 sin(x)** | 3.5 | 5 | 1 | 3 | 0.5 |
| **11** | **sin(ex) – e-x +1** | 0 | 1 | 2 | 1 | 0.25 |
| **12** | **5 x sin(x + 1) + 2 cos(x)** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0.25 |
| **13** | **5 e-x + 4 x + x3/3** | -1 | 1 | 1 | 2 | 0.5 |
| **14** | **-2 sin(4x) ln(-x) + 5** | -2.5 | -1.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **15** | **sin(x – 1) – x cos(x + 3)** | -4 | -2 | 3 | 1 | 0.5 |
| **16** | **4 sin (x) – x1/2** | 1 | 2 | 2 | 3 | 0.25 |
| **17** | **5 sin3(x) + cos3(x)** | 1 | 2 | 2 | 1 | 0.25 |
| **18** | **cos(2x + 1) ln (2 / x) + 3** | 1 | 3 | 3 | 2 | 0.5 |
| **19** | **3 cos(x2) / ln(x + 5)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0.5 |
| **20** | **sin(x2) + 1 / (2 – x)** | -1.5 | 0.5 | 2 | 1 | 0.5 |
| **21** | **x sin(x) + cos(x) + 5** | 0 | 2 | 1 | 2 | 0.5 |
| **22** | **– cos(x) – cos(2x) – x + 5** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0.5 |
| **23** | **1 + sin(4x) / ln(x)** | 1.5 | 2.5 | 1 | 3 | 0.25 |
| **24** | **(1 + x2)1/2 + e-x** | -1 | 2 | 2 | 1 | 0.75 |
| **25** | **sin(x + 1) e2 / x** | 1 | 2 | 3 | 2 | 0.25 |
| **26** | **2 (1 + x) e-x – 2 cos(x)** | 1 | 4 | 2 | 3 | 0.75 |
| **27** | **– 8 sin(– x3) e-x** | 0.4 | 1.4 | 1 | 3 | 0.25 |
| **28** | **– 10 sin(x3) cos(– x)** | -1.4 | -0.4 | 2 | 1 | 0.25 |
| **29** | **x2cos(x + 3) – 4** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0.25 |
| **30** | **– cos(x – 5) e2x / 3** | 1 | 3 | 1 | 3 | 0.5 |
| **31** | **x - cos(x/3)** | 2 | 3 | 1 | 2 | 0,25 |
| **32** | **x + ln(4x) – 1** | 0 | 2 | 2 | 3 | 0,5 |
| **33** | **ex- 4e-x – 1** | 3 | 4 | 3 | 1 | 0,25 |
| **34** | **x ex– 2** | 2 | 4 | 1 | 2 | 0,5 |
| **35** | **4(x2+1) ln(x) – 1** | 1 | 3 | 2 | 3 | 0,5 |
| **36** | **2 – x - sin(x/4)** | 0,2 | 1,2 | 3 | 2 | 0,25 |
| **37** | **x2 + ln(x) – 2** | -0,5 | 0,5 | 2 | 3 | 0,25 |
| **38** | **сos(x) - (x+2) ½ + 1** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,25 |
| **39** | **4(1+x1/2) ln(x) – 1** | 1,2 | 3,2 | 3 | 1 | 0,5 |
| **40** | **5ln(x) - x1/2** | 3,5 | 5 | 1 | 3 | 0,5 |
| **41** | **ex+ x3 –2** | 0 | 1 | 2 | 3 | 0,25 |
| **42** | **3sin(x1/2) + x – 3** | 1 | 2 | 1 | 2 | 0,25 |
| **43** | **0,1 x2 – x ln(x)** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0,5 |
| **44** | **cos(1 + 0,2x2) – x** | -2,5 | -1,5 | 1 | 1 | 0,25 |
| **45** | **3 x – 4 ln(x) – 5** | -4 | -2 | 3 | 2 | 0,5 |
| **46** | **sin(1 - 0,2 x2) – x** | 1 | 2 | 2 | 1 | 0,25 |
| **47** | **ex- e-x – 2** | 1 | 2 | 2 | 3 | 0,25 |
| **48** | **x - sin(1/x)** | 1 | 3 | 3 | 1 | 0,5 |
| **49** | **ex+ ln(x) –x** | -1 | 1 | 1 | 3 | 0,5 |
| **50** | **1 – x + sin(x) - ln(1+x)** | -1,5 | 0,5 | 2 | 1 | 0,5 |
| **51** | **(1-x) ½ - cos(1-x)** | 0 | 2 | 1 | 2 | 0,5 |
| **52** | **sin(x2) + cos(x2) – 10 x** | 1 | 3 | 3 | 2 | 0,5 |
| **53** | **x2 - ln(1+x) – 3** | 1,5 | 2,5 | 1 | 3 | 0,25 |
| **54** | **cos(x/2) ln(x-1)** | -1 | 2 | 2 | 3 | 0,75 |
| **55** | **cos(x/5) (1+x) ½ - x** | 1 | 2 | 3 | 1 | 0,25 |
| **56** | **3 x - e-x** | 1 | 4 | 2 | 1 | 0,75 |
| **57** | **4(1+x 1/2) ln(x) – 10** | 0,4 | 1,4 | 1 | 2 | 0,25 |
| **58** | **sin(x) - cos(x) + 4 x – 4** | -1,4 | -0,4 | 2 | 3 | 0,25 |
| **59** | **x – 1 / (3+sin(3,6x))** | 3 | 4 | 3 | 2 | 0,25 |
| **60** | **8 (x – 1)** | 1.2 | 3.2 | 3 | 1 | 0.5 |

#### **1.4.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Схема алгоритмов и программа метода численного интегрирования, а также результаты контрольного тестирования.
3. Результаты вычисления по составленной программе «расчет на ПК», которые записаны в табл. 1.4-2.

Таблица 1.4-2

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i** | **E** | **n** | **h** | **I** |
| 1 | 0.1 |  |  |  |
| 2 | 0.01 |  |  |  |
| 3 | 0.001 |  |  |  |
| 4 | 0.0001 |  |  |  |

1. Зависимость числа итераций от заданной точности, построенная по табл.1.4-3.

Таблица 1.4-3

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **E** | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
| **n** |  |  |  |  |

1. Результаты «ручного расчета» интеграла с шагом и ( и ) и значения погрешностей по правилу **Рунге**.



1. Результаты решения, полученные с помощью математических пакетов.

#### **1.4.5. Пример выполнения задания**

**1**. **Задания для численного интегрирования:**

* – подынтегральная функция;



* **a=1, b=3**–пределы интегрирования;
* методы интегрирования для выполнения п.**2** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* методы интегрирования для выполнения п.**5** – средних прямоугольников, трапеций, Симпсона;
* начальный шаг интегрирования **h0=1.**

**2. Схемы алгоритмов, программы заданных методов и результаты**

**контрольного тестирования**

Схемы алгоритмов методов интегрирования приведены на рис.1.4.2-2, 1.4.3-2 и 1.4.4-2 в [2], а программы студенты должны написать самостоятельно.

1. **Результаты вычисления «расчета на ПК»**

Вычисления по составленным программам с точностью сведены в таблицу1.4-2:



* **по формуле средних прямоугольников1.4.2-3в [2]:**



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0.1 | 2 | 1 | 1.32 |
| 0.01 | 4 | 0. 5 | 1.302 |
| 0.001 | 16 | 0.125 | 1.2962 |
| 0.0001 | 64 | 0.03125 | 1.29586 |

* **по формуле трапеций1.4.3-1 в [2]:**



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0.1 | 2 | 1 | 1.24 |
| 0.01 | 8 | 0. 25 | 1.292 |
| 0.001 | 16 | 0.125 | 1.2949 |
| 0.0001 | 64 | 0.03125 | 1.29578 |

* **по формуле Симпсона1.4.4-3в [2]:**



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0.1 | 4 | 0.5 | 1.29 |
| 0.01 | 4 | 0.5 | 1.295 |
| 0.001 | 4 | 0.5 | 1.2953 |
| 0.0001 | 8 | 0.25 | 1.29579 |

1. **Зависимости числа итераций от точности**

Вычисленные значения сведены в табл. 1.4-3:

* **по формуле средних прямоугольников:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| E | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
| **n** | 2 | 4 | 16 | 64 |

* **по формуле трапеций:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| E | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
| **n** | 2 | 8 | 16 | 64 |

* **по формуле Симпсона:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| E | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
| **n** | 4 | 4 | 4 | 8 |

1. **Результаты «ручного расчета» интеграла с шагом и ( и ) и оценка его погрешности по правилу Рунге**



Правило Рунге применяют для вычисления погрешности путём двойного просчёта интеграла с шагами **h/2** и **h,**при этом погрешность вычисляется по формуле .



Полагают, что интеграл вычислен с точностью **Е**, если тогда , где – уточненное значение интеграла, **p** – порядок метода.



Вычислим интеграл по формуле

* **средних прямоугольников** и оценим погрешность интегрирования методом двойного просчёта:



* **трапеций** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:



* **Симпсона** и оценим погрешность интегрирования методом **двойного просчета**:



##### 1.4.1. Контрольные вопросы по теме «Численное интегрирование»

1. Что такое шаг интегрирования?
2. По какой формуле вычисляется шаг равномерной сетки изменения х на отрезке [a;b]?
3. Каким образом связана задача численного интегрирования и интерполяция?
4. Какое влияние оказывает уменьшение числа разбиений на отрезке [a;b] на погрешность интегрирования?
5. Каким образом вычисляется определенный интеграл в случае, если подынтегральная функция задана таблицей с переменным шагом?
6. Какой из изученных вами методов численного интегрирования обладает высшей степенью точности?
7. Зависит ли точность численного интегрирования от величины шага интегрирования?
8. Для чего предназначен метод двойного просчета?
9. Какие методы относятся к методам численного интегрирования?
10. Какой параметр должен быть известен, чтобы определить число разбиений отрезка [a;b] при решении задачи численного интегрирования?
11. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле трапеций?
12. Что представляет собой формула для вычисления элементарного интеграла по формуле Симпсона?
13. Как называется численное значение интеграла функции одной переменной?
14. Как называется численное значение интеграла функции двух переменных?
15. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе прямоугольников?
16. Интерполяционным многочленом, какой степени заменяется подынтегральная функция в методе трапеций?
17. Как называется метод численного интегрирования, в котором подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени?
18. В каком методе для вычисления интеграла необходимо выбирать количество интервалов разбиения кратное двум?
19. В каком методе при вычислении интеграла с заданной точностью потребуется меньшее количество интервалов разбиения?
20. Какой метод позволяет обеспечить вычисление интеграла с заданной точностью?
21. Какой метод численного интегрирования даст наиболее точный результат, если подынтегральная функция имеет вид y = 5x3?
22. В каком методе численного интегрирования подынтегральная функция заменяется квадратичным полиномом?
23. Какой метод численного интегрирования даст точный результат, если подынтегральная функция имеет вид f(x) = x2?
24. Какой метод интегрирования наилучшим образом подходит для вычисления интеграла линейной функции?
25. Обеспечивают ли методы трапеций и метод средних прямоугольников точность одного порядка?
26. Какой из известных вам методов интегрирования обладает наименьшей точностью?
27. Сколько шагов интегрирования содержит элементарный отрезок интегрирования в методе Симпсона?
28. Какому числу кратно количество интервалов разбиения в методе Симпсона?
29. Позволяет ли метод прямоугольников получить точное значение интеграла, если подынтегральная функция – полином 0-й степени?